Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Determinante, Eigenwerte, Eigenvektoren, diagonalisierbar

Hinweis: Sämtliche Punkte auf diesem Blatt sind Bonuspunkte.

Aufgabe 1. ((Gruppe) 2P+2P)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch die Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{falls } i = j-1, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ -j & \text{falls } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie für $n = 1, 2, 3$ die Matrix A_n explizit an und berechnen Sie $\det(A_n)$.

b) Zeigen Sie durch Induktion nach n, dass $\det(A_n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+4P)

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Über welchen endlichen Körpern $\mathbb{F}_p$ sind diese jeweils invertierbar?

b) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante, Eigenwerte und Eigenräume von C.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 02. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Alleine) 1P+3P)

a) Sei K nun ein beliebiger Körper, $n, k \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit $A^k = I_n$. Hier bezeichnet I_n wie immer die Identitätsmatrix. Zeigen Sie, dass dann alle Eigenwerte von A Einheitswurzeln sind, d.h. es existiert für jeden Eigenwert λ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^k = 1$.

b) Sei $\sigma = (1, 7, 3, 5)(2, 6, 4) \in S_7$ und der Endomorphismus ϕ_σ durch:

$$\phi_\sigma : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \quad \phi_\sigma(e_i) \mapsto e_{\sigma(i)}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Determinante und Eigenräume von ϕ_σ.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+4P)

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

a) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_k \in V$. Zeigen Sie, dass dann bereits $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind.

b) Wir wollen folgende Aussage zeigen: Seien $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen. Dann kommutieren ϕ und ψ genau dann, wenn sie simultan diagonalisierbar[1] sind. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

   (i) Seien $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ zwei kommutierende Endomorphismen, d.h. es gilt $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ ψ-invariant ist, d.h. es gilt $\psi(\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)) \subset \mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$.

   (ii) Sei $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $U \subset V$ ein ϕ-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass dann auch $\phi|_U$ diagonalisierbar ist.

   (iii) Zeigen Sie nun die Aussage.

   Bemerkung: Falls Sie einen Zwischenschritt nicht lösen können, dürfen Sie ihn dennoch zum Beweis der Aussage verwenden.

[1] D.h. es existiert eine Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ sodass alle b_i Eigenvektoren von ϕ und ψ sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 02. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.